$$\int_S 1\, d\sigma = \int_\Phi 1\, d\sigma = \int_K \| k(\varphi(u,v))\| d(u,v) =$$

$$= \int_K r^2 \cdot \sin\theta \; d(\theta,\varphi) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = 4\pi r^2$$

ΑΣΚΗΣΗ:

Υπολογίστε το $\int_S \overbrace{(x^2+y^2)z}^{f(x,y,z)} d\sigma$ όπου $S = \Phi(K)$ όπου Φ ίδιο με το παραπάνω παράδειγμα:

ΛΥΣΗ

$$\int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} f(\varphi(\theta,\varphi)) \, \| N(\varphi(\theta,\varphi)) \| \cdot d(\theta,\varphi) =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\theta \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \, r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta \; d(\theta,\varphi) =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^5 \cdot \sin^3\theta \cdot \cos\theta \; d(\theta,\varphi) =$$

$$= r^5 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3\theta \cdot \cos\theta \; d\varphi \, d\theta = \pi \frac{r^5}{2}$$

Παρατήρηση:

Έστω $\Phi: K \to \mathbb{R}^3$, $K \subset \mathbb{R}^2$, μια παραμετρικοποίηση της επιφάνειας $S = \varphi(K) \subset \mathbb{R}^3$ (με όλες τις απαιτούμενες συνθήκες στα K και Φ) και έστω ότι $G \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό και $T \subset G$ με T ένα άλλο σύνολο παραμέτρων και $g: G \to M$ (όπου $K \subset M \subset \mathbb{R}^2$ M: ανοιχτό) με g 1-1, C^1 και $\det(Dg(s,t)) \neq 0$, $\forall (s,t) \in G$ και $g(T) = K$ (δηλ. η $g|_T = K$) [δηλ. g είναι ένας παραμετρικός μετασχηματισμός (ή διαφορομορφισμός)].

Τότε η $\psi: T \to \mathbb{R}^3$ $\psi(s,t) = \Phi(\underbrace{g(s,t)}_{\in K}) = (\Phi \circ g)(s,t)$ είναι μια άλλη παραμετρική αναπαράσταση της επιφάνειας $S := \Phi(K) = \psi(T)$ με μοναδιαία κάθετα που διαφέρουν μόνο ως προς το πρόσημο της ορίζουσας $\det Dg(s,t)$ του μετασχηματισμού g αφού $\left(\frac{\partial\psi}{\partial s} \times \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)(s,t) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)(\underbrace{g(s,t)}_{=(u,v)}) \cdot \det Dg(s,t) =$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)(g(s,t)) \cdot \operatorname{sgn} Dg(s,t) \cdot |\det Dg(s,t)|.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 1

Επιφανειακά ολοκληρώματα πραγματικών συναρτήσεων είναι αναλλοίωτα κάτω από "επιτρεπτούς" παραμετρικούς μετασχηματισμούς

αφού $\int_{\phi} f\,d\sigma = \int_K f(\phi(u,v))\cdot\|N(\phi(u,v))\|\cdot d(u,v) =$

$$= \int_K f(\phi(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\right)\cdot d(u,v) =$$

$$\overset{\text{ΚΑΜ}}{=} \int_T f(\underbrace{\phi(g(s,t))}_{\psi(s,t)})\,\|\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial u}(g(s,t))\times\frac{\partial\phi}{\partial v}(g(s,t))\|\cdot|\det Dg(s,t)|}_{\|\frac{\partial\psi}{\partial s}\times\frac{\partial\psi}{\partial t}\|}\,d(s,t)$$

$$= \int_{\psi} f\cdot d\sigma =: \int_S f\cdot d\sigma.$$

με $S=\phi(K)=\psi(T)$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2:

Τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα μιας επιφάνειας μένουν αναλλοίωτα κάτω από επιτρεπτούς παραμετρικούς μετασχηματισμούς, οι οποίοι διατηρούν τον προσανατολισμό της επιφάνειας, δηλαδή με την ιδιότητα $\det Dg(s,t)>0$ $\forall (s,t)\in T$ ενώ αντιστρέφουν τη φορά τους, κάτω από επιτρεπτούς παραμετρικούς μετασχηματισμούς που αντιστρέφουν τον προσανατολισμό της επιφάνειας, δηλαδή $\det Dg(s,t)<0$, $\forall (s,t)\in T$